Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 1

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $2k$, а с $(i-2)$-ой и $(i+2)$-ой частицами – пружинками жесткости $3k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к одной стене, а N-ая – к другой. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые "вынужденные колебания". Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 2

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости k, а с $(i-3)$-ой и $(i+3)$-ой частицами – пружинками жесткости $3k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к стене, а N-ая – свободна. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на "длинных" пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \mathrm{const}$, $Nm = \mathrm{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 3

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $2k$, а с $(i-4)$-ой и $(i+4)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Весь фрагмент цепочки замкнут в кольцо. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые "вынужденные колебания". Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 4

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $2k$, а с $(i-5)$-ой и $(i+5)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть вторая частица жестко закреплена, а первая и последняя частицы свободны. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на "длинных" пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 5

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $4k$, а с $(i-3)$-ой и $(i+3)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к одной стене, а N-ая – к другой. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые “вынужденные колебания”. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 6

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости k, а с $(i-2)$-ой и $(i+2)$-ой частицами – пружинками жесткости $6k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к стене, а N-ая – свободна. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на "длинных" пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 7

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $2k$, а с $(i-6)$-ой и $(i+6)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Весь фрагмент цепочки замкнут в кольцо. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые "вынужденные колебания". Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \mathrm{const}$, $Nm = \mathrm{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 8

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $5k$, а с $(i-3)$-ой и $(i+3)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть вторая частица жестко закреплена, а первая и последняя частицы свободны. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на "длинных" пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 9

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $7k$, а с $(i-7)$-ой и $(i+7)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к одной стене, а N-ая – к другой. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые “вынужденные колебания”. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий серженъ можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 10

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости k, а с $(i-4)$-ой и $(i+4)$-ой частицами – пружинками жесткости $3k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к стене, а N-ая – свободна. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на "длинных" пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 11

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости k, а с $(i-5)$-ой и $(i+5)$-ой частицами – пружинками жесткости $4k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Весь фрагмент цепочки замкнут в кольцо. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые “вынужденные колебания”. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 12

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $3k$, а с $(i-6)$-ой и $(i+6)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть вторая частица жестко закреплена, а первая и последняя частицы свободны. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на "длинных" пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 13

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $4k$, а с $(i-3)$-ой и $(i+3)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к одной стене, а N-ая – к другой. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые “вынужденные колебания”. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 14

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $2k$, а с $(i-2)$-ой и $(i+2)$-ой частицами – пружинками жесткости $9k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к стене, а N-ая – свободна. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на “длинных” пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 15

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $2k$, а с $(i-3)$-ой и $(i+3)$-ой частицами – пружинками жесткости $k/2$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Весь фрагмент цепочки замкнут в кольцо. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые "вынужденные колебания". Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 16

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $3k$, а с $(i-4)$-ой и $(i+4)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть вторая частица жестко закреплена, а первая и последняя частицы свободны. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на "длинных" пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий серженъ можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 17

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $2k$, а с $(i-5)$-ой и $(i+5)$-ой частицами – пружинками жесткости $k/3$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к одной стене, а N-ая – к другой. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые “вынужденные колебания”. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 18

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $2k$, а с $(i-7)$-ой и $(i+7)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к стене, а N-ая – свободна. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на "длинных" пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 19

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости k, а с $(i-8)$-ой и $(i+8)$-ой частицами – пружинками жесткости $3k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Весь фрагмент цепочки замкнут в кольцо. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые “вынужденные колебания”. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 20

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости k, а с $(i-9)$-ой и $(i+9)$-ой частицами – пружинками жесткости $4k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть вторая частица жестко закреплена, а первая и последняя частицы свободны. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на “длинных” пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 21

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $5k$, а с $(i-10)$-ой и $(i+10)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к одной стене, а N-ая – к другой. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые “вынужденные колебания”. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий серженъ можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 22

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $2k$, а с $(i-7)$-ой и $(i+7)$-ой частицами – пружинками жесткости $5k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к стене, а N-ая – свободна. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на "длинных" пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \mathrm{const}$, $Nm = \mathrm{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 23

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости k, а с $(i-8)$-ой и $(i+8)$-ой частицами – пружинками жесткости $3k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Весь фрагмент цепочки замкнут в кольцо. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые “вынужденные колебания”. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 24

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости k, а с $(i-5)$-ой и $(i+5)$-ой частицами – пружинками жесткости $2k$. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть вторая частица жестко закреплена, а первая и последняя частицы свободны. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с "выключеным" дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \gg 1$. Кроме "обычных" колебаний, при которых тяжелая частица почти не движется, есть выделенное колебание, при котором она колеблется на "длинных" пружинах, а остальные, легкие частицы, увлекаются этим движением, почти не оказывая на него влияния. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. "Выключив" дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий сержень можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как "плоская" конфигурация, так и "гармошка". Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.

Домашнее задание №18

Колебания линейных цепочек

Вариант 25

1. Бесконечная цепочка представляет собой последовательность частиц одинаковой массы m, могущих двигаться вдоль одного направления, соединенных пружинками следующим образом. Каждая i-ая частица соединена с соседними, $(i-1)$-ой и $(i+1)$-ой, пружинками жесткости $2k$, а с $(i-20)$-ой и $(i+20)$-ой частицами – пружинками жесткости k. Найдите решения в виде бегущих вдоль цепочки волн. Как связаны частоты и волновые числа для таких волн? Изобразите эту связь графически. Напишите решения в виде стоячих волн.

2. По цепочке, рассмотренной в предыдущей задаче, бежит волна. Найдите среднюю за период колебаний работу, совершаемую над i-ой частицей всеми частицами, расположенными в цепи до нее. Убедитесь, что средний за период колебаний поток энергии вдоль цепочки равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость волны.

3. Рассмотрим теперь конечный фрагмент цепочки из задачи 1 длиной N, оставив только взаимодействия между соседними частицами. Пусть первая частица жестко прикреплена к одной стене, а N-ая – к другой. Сформулируйте граничные условия для такой системы. В каком виде (стоячих или бегущих волн) необходимо искать решение? Получите спектр фрагмента цепочки. Найдите нормальные колебания. Что изменится, если вернуть дальнее взаимодействие, учтенное в задаче 1?

4. Рассмотрим снова бесконечную цепочку из задачи 1 с “выключеным” дальним взаимодействием, находящуюся изначально в состоянии покоя. В некоторый момент времени i-ую частицу приводят в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с малой частотой $\gamma \ll (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания цепочки. Чему равна мощность внешнего источника, раскачивающего таким образом цепочку? Что изменится, если учесть конечность цепочки с граничными условиями из задачи 3? Опишите качественно, к чему приведет учет дальнего взаимодействия.

5. Если частота внешнего источника лежит в запрещенной области частот системы, вынужденные колебания оказываются существенно иными. Пусть теперь i-ая частица из задачи 1 приводится в движение по закону $x_i = A\cos\gamma t$ с $\gamma \gg (k/m)^{1/2}$. Найдите вынужденные колебания системы. Чему в этом случае равна мощность источника? Существенно ли искажает решение учет конечности цепочки с соответствующими граничными условиями? Получите соответствующую поправку. Учтите при рассмотрении и дальнее взаимодействие в системе.

6. Рассмотрим теперь влияние трения на вынужденные колебания, найденные в задаче 4. Пусть на каждую частицу действует сила трения $F_i^f = -2\alpha\dot{x}_i$. Какими теперь будут вынужденные колебания системы? Чему равна мощность диссипации энергии в системе? Совпадает ли она с мощностью внешнего источника?

7. В этой задаче исследуется влияние точечных дефектов в кристалле. Рассмотрим цепочку из задачи 1 без дальнего взаимодействия с граничными условиями из задачи 3. Дефектом в такой цепочке может быть частица другой массы или пружинка другой жесткости. Пусть s-ая частица имеет массу εm, где $\varepsilon \ll 1$. Кроме “обычных” колебаний, при которых легкая частица увлекается пружинками, есть выделенное колебание, при котором легкая частица движется на почти покоящихся пружинках, а тяжелые частицы совершают слабые “вынужденные колебания”. Найдите все моды системы.

8. Пусть теперь все частицы с четными номерами в цепочке из задачи 1 имеют массу αm, отличающуюся от массы остальных частиц. Получите дисперсионные соотношения в этом случае. Изобразите дисперсионные кривые. “Выключив” дальнее взаимодействие, учтите влияние граничных условий, замкнув фрагмент цепочки длиной $2N$ в кольцо. Проверьте предельный переход к случаю $\alpha = 1$.

9. Упругий серженъ можно получить, переходя к континуальному пределу в рассмотренных задачах о цепочках. Устремив число частиц в предыдущей задаче к бесконечности, массы частиц и расстояния a между ними к нулю, так что $Na = \mathrm{const}$, $Nm = \mathrm{const}$, получите волновое уравнение для стержня.

10. Рассмотрим модель изменения симметрии кристалла. Пусть частицы из задачи 1, связаные пружинками, висят на нитях длины $l \gg a$, где a – расстояния между частицами. Пружинки, соответствующие взаимодействию ближайших частиц, изначально сжаты, причем относительное сжатие равно ε. При различных значениях ε равновесию такой системы может отвечать как “плоская” конфигурация, так и “гармошка”. Найдите соответствующие положения равновесия. Получите дисперсионные соотношения для цепочки, колеблющейся вблизи этих положений равновесия. Частицы колеблятся так, что нити все время натянуты, причем отклонения возможны как в плоскости системы, так и в перпендикулярных плоскостях.